101 學年四技二專第三次聯合模擬考試
共同考科　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 101-3-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	A	B	A	C	D	B	A	C	A	C	A	B	B	B	D	C	B	D	A	D	C	C	A	D

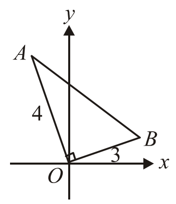
1. 此 10 個資料由小而大排列如下：
   2、2、3、3、8、10、12、20、20、20
   其全距 $a=20-2=18$，算術平均數
   $$b=\frac{2+2+3+3+8+10+12+20+20+20}{10}=10$$
   中位數 $c=\frac{8+10}{2}=9$，$a-b+c=18-10+9=17$

2. $\because a：b：c=\sin A：\sin B：\sin C=3：5：7$
   $$\Rightarrow \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\Rightarrow\begin{cases}\frac{3}{2R}=\sin A\\ \frac{5}{2R}=\sin B\\ \frac{7}{2R}=\sin C\end{cases}$$
   $$\therefore \frac{\sin B}{\sin A+\sin C}=\frac{\frac{5}{2R}}{\frac{3}{2R}+\frac{7}{2R}}=\frac{5}{3+7}=\frac{1}{2}$$

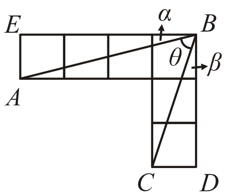
3. $\because \sin\theta=-\frac{3}{5}$，且 $\tan\theta>0$，$\therefore \theta\in$ Ⅲ
   $$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times(-\frac{3}{5})\times(-\frac{4}{5})=\frac{24}{25}$$

4. 已知 $\sum_{k=1}^{n}a_k=3n^2-1=S_n$
   $$\sum_{k=6}^{10}a_k=S_{10}-S_5=(3\times10^2-1)-(3\times5^2-1)$$
   $$=3\times(10^2-5^2)=3\times75=225$$

5. A、B 之極坐標爲
   $A(4,105°)$、$B(3,15°)$
   $\because \angle AOB=105°-15°=90°$
   $\therefore \overline{AB}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

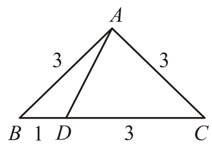


6. 令 $\angle ABE=\alpha$，$\angle CBD=\beta$
   則 $\tan\alpha=\frac{1}{4}$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$
   $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}=\frac{7}{11}$$
   $$\tan\theta=\tan[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)]=\cot(\alpha+\beta)=\frac{11}{7}$$



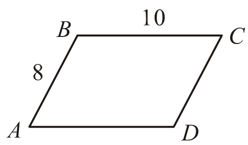
7. $\because -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$，$\therefore -30°\le x+\frac{\pi}{3}\le150°$
   $-\frac{1}{2}\le\sin(x+\frac{\pi}{3})\le1$，$(\times2)\Rightarrow -1\le2\sin(x+\frac{\pi}{3})\le2$
   同減 $1\Rightarrow -2\le2\sin(x+\frac{\pi}{3})-1\le1$，$\therefore -2\le f(x)\le1$
   $\therefore M=1$、$m=-2$，$M+m=1+(-2)=-1$

8. 由 ΔABC 中，$\cos B=\frac{3^2+4^2-3^2}{2\times3\times4}=\frac{2}{3}$
   由 ΔABD 中，$\because \overline{AD}^2=3^2+1^2-2\times3\times1\times\frac{2}{3}=6$
   $\therefore \overline{AD}=\sqrt{6}$



9. $\because \cos A=\frac{5^2+7^2-(4\sqrt{2})^2}{2\times5\times7}=\frac{3}{5}$
   $\therefore \sin A=\frac{4}{5}$
   $\Delta ABC=\frac{1}{2}\times7\times5\times\frac{4}{5}=14$

10. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$
    $=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})$
    $=|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=10^2-8^2=36$



11. 設 $f(x)=(x-1)^5=(x^2-1)Q(x)+(ax+b)$
    則 $f(1)=a+b=0$ ……①
    $f(-1)=-a+b=-32$ ……②
    ①－②得 $2a=32$，$\therefore a=16$ 代入①得 $b=-16$
    $\therefore 2a+b=16$

12. $$\frac{2x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$
    同乘 x^3-1 得 $2x^2+1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)$
    令 $x=1$ 代入得 $3=3A$，$\therefore A=1$
    比較 x^2 項係數得 $2=A+B$，$\therefore B=1$
    比較常數項得 $1=A-C$，$\therefore C=0$
    $\therefore A+B+C=1+1+0=2$

13. $$\begin{vmatrix}5&2&10\\10&-4&20\\20&6&30\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&2&10\\10&-4&20\\10&6&30\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5+5&2&10\\10+10&-4&20\\20+10&6&30\end{vmatrix}$$
    $$=\begin{vmatrix}10&2&10\\20&-4&20\\30&6&30\end{vmatrix}=0$$
    成比例

14. 無解$\Rightarrow \frac{k}{4}=\frac{1}{k}\neq\frac{1}{2}\Rightarrow k^2=4$，且$k\neq 2$

$\Rightarrow k=\pm 2$，且 $k\neq 2\Rightarrow k=-2$

15. $W=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi$

$\because W^6=(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi)^6=\cos 10\pi+i\sin 10\pi=1$

$\therefore$最小正整數 $n=6$

16. $\because \frac{Z+2}{Z}=7+8i$

$\therefore 1+\frac{2}{Z}=7+8i\Rightarrow\frac{2}{Z}=6+8i\Rightarrow\frac{1}{Z}=3+4i$

$\because \left|\frac{1}{Z}\right|=|3+4i|=5$，$\therefore |Z|=\frac{1}{5}$

17. $\because \frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+b}{3}\geq\sqrt[3]{(\frac{a}{2})(\frac{a}{2})(b)}$，且已知 $a+b=6$

$\therefore 2\geq\sqrt[3]{\frac{1}{4}a^2b}$，兩邊立方得$8\geq\frac{1}{4}a^2b$，$\therefore a^2b\leq 32$

當 $\frac{a}{2}=b$ 時，a^2b 有最大值 32，$\therefore M=32$

$\because a+b=6$，$\therefore a+\frac{a}{2}=6\Rightarrow a=4=p$ 時，$b=2=k$

$\therefore \frac{M}{pk}=\frac{32}{4\times 2}=4$

18. $\because \log_x a=\frac{1}{2}$、$\log_x b=\frac{1}{3}$、$\log_x c=\frac{1}{4}$、$\log_x d=\frac{1}{5}$

$\therefore \log_x(\frac{ab}{cd})=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{23}{60}$，$\therefore \log_{\frac{ab}{cd}}x=\frac{60}{23}$

19. $f(x)=\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$，$f(a)=\frac{3^a-3^{-a}}{3^a+3^{-a}}=\frac{4}{5}$

$\Rightarrow 5\times 3^a-5\times 3^{-a}=4\times 3^a+4\times 3^{-a}$

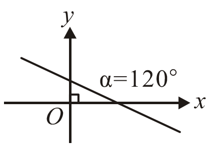
$\Rightarrow 3^a=9\times 3^{-a}=3^{2-a}$，$\therefore a=2-a$，$\therefore a=1$

20. (B) L：$\sqrt{3}x+y-1=0$ 之斜率為$-\sqrt{3}$

且$\because \tan\alpha=-\sqrt{3}$，$\therefore$斜角 $\alpha=120°$

如右圖，L 和 y 軸所夾銳角為

$120°-90°=30°$



(C) $\because P(1,1)$ 滿足$\sqrt{3}x+y-1>0$

$\therefore P(1,1)$ 在 L 的上方

(D) $d(P,L)=\frac{|\sqrt{3}\times 1+1-1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

21. 因為 20 個硬幣均相同，所以其結果只需考慮出現正面的次數為 0、1、2、……、20，共 21 種不同的結果

22. 常數項為 $C_3^5(x^3)^2(-2x^{-2})^3=10\times(-8)=-80$

23. $\frac{C_1^4\times C_1^6}{C_3^8}=\frac{4\times 6}{56}=\frac{3}{7}$

24. $(\frac{2}{5}\times 40+\frac{3}{5}\times 10)-20=16+6-20=2$ (元)

25. (A) $\because C$ 組資料為 A 組資料的 2 倍

$\therefore \overline{X}_C=2\overline{X}_A$

(B) $\because B$ 組中每一資料乘以 2 倍再加上 4，恰為 C 組中的每一資料，$\therefore \overline{X}_C=2\overline{X}_B+4$

(C) $\because \overline{X}_C=2\overline{X}_A$，$\therefore S_C=2S_A$

(D) $\because$平移標準差不變，$\therefore S_A=S_B$