101 學年四技二專第四次聯合模擬考試
共同考科　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 101-4-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	C	C	B	A	A	B	C	D	D	B	A	D	A	A	D	B	C	A	C	B	D	A	B	C

1. $(x+1)$ 爲 $f(x)=x^3-kx^2+11x+3k$ 的因式
故 $f(-1)=0$，即 $(-1)^3-k\times(-1)^2+11\times(-1)+3k=0$
$\Rightarrow k=6\Rightarrow f(6)=216-216+66+18=84$

2. $\begin{vmatrix}-10 & 20 & -10\\ -15 & 15 & -15\\ 3 & 6 & 9\end{vmatrix}=(10)\times(15)\times(3)\times\begin{vmatrix}-1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$
$=450\times\begin{vmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=450\times(3-1)=900$

3. 骰子點數和等於 7 的機率與骰子的顏色無關
若集合 A 表示點數和等於 7 的事件
則 $A=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}$
$P=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

4. 原式 $=\left|(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}\right|=\left|(\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}\right|$
$=\left|(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{DC}\right|=\left|\vec{0}+\overrightarrow{DC}\right|=\left|(3,1)\right|=\sqrt{10}$

5. $C_1\Rightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=9\Rightarrow R_1=3$
$C_2\Rightarrow(x-2)^2+(y+4)^2=16\Rightarrow R_2=4$
$\Rightarrow\dfrac{R_1}{R_2}=\dfrac{3}{4}$

6. $[(2)^{\frac{1}{2}}]^{2x+1}=\dfrac{2^{2^{\frac{5}{2}}}}{2^x}=2^{\frac{5}{2}-x}\Rightarrow\dfrac{2x+1}{2}=\dfrac{5}{2}-x\Rightarrow x=1$
$\log_2 x=\log_2 1=0$

7. 將 4 名學生均分成兩組，方法數爲 $\dfrac{1}{2}C_2^4$，再分配給 6 個班級中的 2 個，分配方法數爲 P_2^6，故符合題意安排的方法數爲 $\dfrac{1}{2}C_2^4P_2^6$

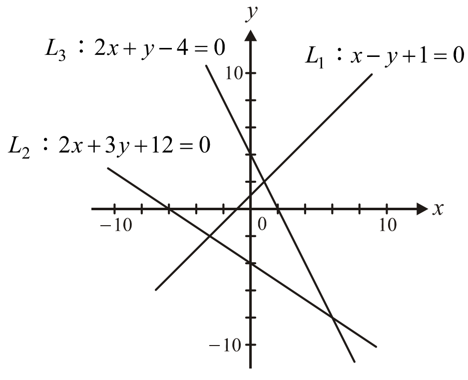
8. 總球數爲 $1+2+3+\cdots\cdots+7=28$
任意取出 1 個球所獲得的期望值爲
$\dfrac{1}{28}\times1+\dfrac{2}{28}\times2+\dfrac{3}{28}\times3+\cdots\cdots+\dfrac{7}{28}\times7$
$=\dfrac{1}{28}\times(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+7^2)$
$=\dfrac{1}{28}\times\sum_{k=1}^{7}k^2=\dfrac{1}{28}\times\dfrac{7\times(7+1)\times(14+1)}{6}=5$

9. (1) 若 $a>2$ ，左式 $=\sqrt{(a-2)}$
右式 $=-\sqrt{(2-a)}\times i=-\sqrt{(-1)(a-2)}\times i$
$=-i\times\sqrt{(a-2)}\times i=\sqrt{(a-2)}$
左式 $=$ 右式，故 $a>2$ (合)
(2) 若 $a=2$ ，左式 $=0=$ 右式 ，故 $a=2$ (合)
(3) 若 $a<2$
左式 $=\sqrt{(a-2)}=\sqrt{(-1)(2-a)}=i\times\sqrt{(2-a)}$
右式 $=-\sqrt{(2-a)}\times i$ ，左式 $\neq$ 右式 ，故 $a<2$ (不合)
由(1)、(2)、(3)可知 $a\geq2$

10. 原式 $=\log_3(\frac{2}{9})^2-\log_3(\frac{10}{3})^2+\log_3(\frac{5}{3})^2$
$=\log_3\dfrac{(\frac{2}{9})^2\times(\frac{5}{3})^2}{(\frac{10}{3})^2}=\log_3[(\dfrac{\frac{2}{9}\times\frac{5}{3}}{\frac{10}{3}})^2]$
$=\log_3(\frac{1}{9})^2=\log_3 3^{-4}=-4$

11. $0.3+0.33+0.333+\cdots\cdots+$ 至第 n 項
$=\dfrac{1}{3}(0.9+0.99+0.999+\cdots\cdots+$ 至第 n 項$)$
$=\dfrac{1}{3}[(1-0.1)+(1-0.01)+(1-0.001)+\cdots\cdots+$ 至第 n 項$]$
$=\dfrac{1}{3}[n-(0.1+0.1^2+0.1^3+\cdots\cdots+0.1^n)]$
$=\dfrac{1}{3}[n-\dfrac{0.1(1-0.1^n)}{1-0.1}]=\dfrac{n}{3}-\dfrac{1}{27}(1-\dfrac{1}{10^n})$

12. 由圖可知 ΔABC 內部區域
應在 L_1 、 L_2 右方， L_3 左方 $\Rightarrow\begin{cases}x-y+1>0\\ 2x+3y+12>0\\ 2x+y-4<0\end{cases}$



13. $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{169}{60}\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=\dfrac{60}{169}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\times\dfrac{60}{169}=\dfrac{49}{169}$

$\Rightarrow \sin\theta-\cos\theta=\pm\dfrac{7}{13}$，但已知 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$

故 $\sin\theta<\cos\theta \Rightarrow \sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{7}{13}$

14. $a:b:c=\dfrac{1}{h_a}:\dfrac{1}{h_b}:\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{15}:\dfrac{1}{12}:\dfrac{1}{10}=4:5:6$

設 $a=4k$、$b=5k$、$c=6k(k>0)$

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{(4k)^2+(5k)^2-(6k)^2}{2(4k)(5k)}=\dfrac{1}{8}$

15. $\cos 2012^\circ=\cos(2012^\circ-1800^\circ)=\cos 212^\circ$

$\cos 2010^\circ=\cos(2010^\circ-1800^\circ)=\cos 210^\circ$

$\cos 212^\circ>\cos 210^\circ \Rightarrow \cos 212^\circ-\cos 210^\circ>0$

$\tan 1000^\circ=\tan(1000^\circ-180^\circ\times 5)=\tan 100^\circ$

$\cot 1180^\circ=\cot(1180^\circ-180^\circ\times 6)=\cot 100^\circ$

$\tan 1000^\circ\times\cot 1180^\circ=1>0$

故 P 點在第一象限

16. 依題意，$x^2+y^2=4$ 之半徑 $r=2$

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=r=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OB}|\times\cos\theta$

$=2\times 2\times\cos\theta=4\cos\theta$

當 $\theta=180^\circ$ 時，內積有最小值 $=4\times(-1)=-4$

17. 原式 $=\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}-\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}+\dfrac{3(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{6-3}-\dfrac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2}$

$=2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\sqrt{6}-\sqrt{3}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

18. 由柯西不等式可知

$(a^2+b^2+c^2)[3^2+(-4)^2+5^2]\ge(3a-4b+5c)^2$

$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2)\times 50\ge(5\sqrt{2})^2 \Rightarrow (a^2+b^2+c^2)\ge 1$

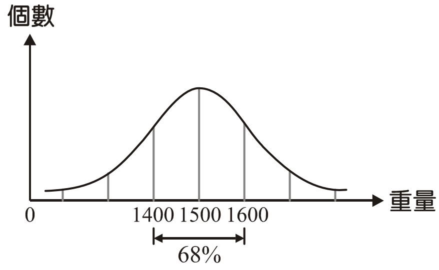
故最小值爲 1

19. $A(a,0)$、$B(b,2)$ 中點爲 $(\dfrac{a+b}{2},1)$

又 $(\dfrac{a+b}{2},1)$ 必過垂直平分線 $3x+4y=10$

$\Rightarrow 3\times(\dfrac{a+b}{2})+4\times 1=10 \Rightarrow a+b=4$

20. $1000\times\dfrac{1-68\%}{2}=1000\times 0.16=160$



21. 若 $\dfrac{(x+2)^2}{k+2}+\dfrac{(6-y)^2}{6-k}=1$ 圖形爲橢圓

則 $k+2>0$，$6-k>0$ 且 $k+2\ne 6-k$

$\Rightarrow -2<k<6$ 且 $k\ne 2$

$\Rightarrow k=-1,0,1,3,4,5$ (k 取整數)，共 6 個

22. 原式 $\Rightarrow (4x-1)^2=(3y)^2+144$

漸近線方程式爲 $(4x-1)^2\pm(3y)^2=0$

$\Rightarrow (4x-1)+(3y)=0$、$(4x-1)-(3y)=0$

$\Rightarrow 4x+3y-1=0$、$4x-3y-1=0$

23. 原式 $=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{(2x-22)+(x-1)(x-4)}{(x-6)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-3x-18}{(x-6)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{(x-6)(x+3)}{(x-6)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{(x+3)}{(x-1)}=\dfrac{9}{5}$

24. 所圍面積 $=\int_1^4\sqrt{x}\,dx=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4=\dfrac{2}{3}(8-1)=\dfrac{14}{3}$

25. (A) $f(x)=(2x+3)(4x+5)$

$\Rightarrow f'(x)=(2x+3)'(4x+5)+(2x+3)(4x+5)'$

$=2\times(4x+5)+(2x+3)\times 4=16x+22$

(B) $f(x)=x+\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=1+(x^{\frac{1}{2}})'=1+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

(C) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}=2+x^{-1} \Rightarrow f'(x)=-x^{-2}=\dfrac{-1}{x^2}$

(D) $f(x)=(3x+4)^2 \Rightarrow f'(x)=2(3x+4)\times 3=6(3x+4)$