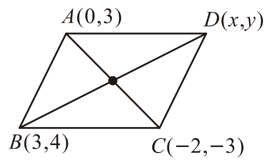
九十九學年四技二專第四次聯合模擬考試
共同考科　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 99-4-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	C	B	D	B	C	C	B	B	D	A	C	A	B	D	A	D	D	C	C	B	A	D	B	A

1. 設 $D(x,y)$，利用 $\overline{AC}$ 中點 $=\overline{BD}$ 中點

$\therefore (\frac{0-2}{2},\frac{3-3}{2})=(\frac{3+x}{2},\frac{4+y}{2})$



$\therefore x=0-2-3=-5$

$y=3-3-4=-4$

故 $D(-5,-4)$

同理 $\overline{AB}$ 中點 $=\overline{CD}$ 中點

$\therefore x=0+3+2=5$，$y=3+4+3=10$，$\therefore D(5,10)$

$\overline{BC}$ 中點 $=\overline{AD}$ 中點

$\therefore x=3-2-0=1$，$y=4-3-3=-2$，$\therefore D(1,-2)$

$\therefore D$ 可以是 $(-5,-4)$、$(5,10)$及$(1,-2)$

2. 原式 $=\lim\limits_{x\to 6}[\frac{x-4}{x-6}-\frac{3x-2}{(x-6)(x+2)}]$

$=\lim\limits_{x\to 6}\frac{(x-4)(x+2)-3x+2}{(x-6)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 6}\frac{\cancel{(x-6)}(x+1)}{\cancel{(x-6)}(x+2)}=\frac{7}{8}$

3. $\because \begin{cases}\sec\alpha<0\\ -\tan\alpha>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sec\alpha<0\\ \tan\alpha<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha\text{在第二或三象限}\\ \alpha\text{在第二或四象限}\end{cases}$

$\Rightarrow\alpha$在第二象限

4. 由根與係數關係：$\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=-2\\ \tan\alpha\cdot\tan\beta=-5\end{cases}$

$\Rightarrow\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{-2}{1-(-5)}=-\frac{1}{3}$

5. 利用 ΔABC面積 $=r\cdot s$，其中 $s=\frac{5+6+9}{2}=10$

ΔABC面積 $=\sqrt{10\cdot(10-5)(10-6)(10-9)}=10\sqrt{2}$

$\Rightarrow 10\sqrt{2}=r\cdot 10\Rightarrow r=\sqrt{2}$

6. $\because|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，又 $|3\vec{a}-\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=9-6\times\frac{1}{3}+1=8\Rightarrow|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

7. 由餘式定理：$f(7)$ 即為 $f(x)\div(x-7)$ 的餘式，再由綜合除法：如右算式

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 3 & -19 & -18 & +30 & -17 & +6 & 7 \\ & +21 & +14 & -28 & +14 & -21 & \\ \hline 3 & +2 & -4 & +2 & -3 & -15 & \end{array}$$

故 $f(7)=-15$

8. $\frac{1+2i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{-1+3i}{2}=a+bi$

$\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\ b=\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow a-b=-2$

9. 由換底公式：$\log_{25}60=\frac{\log_3 60}{\log_3 25}=\frac{\log_3 2^2\times 3\times 5}{\log_3 5^2}$

$=\frac{2\log_3 2+\log_3 3+\log_3 5}{2\log_3 5}=\frac{a+2b+1}{2a}$

10. $\sum\limits_{k=2}^{\infty}(\frac{1}{5})^k=(\frac{1}{5})^2+(\frac{1}{5})^3+\cdots\cdots=\frac{(\frac{1}{5})^2}{1-\frac{1}{5}}=\frac{\frac{1}{25}}{\frac{4}{5}}=\frac{1}{20}$

11. $\because d(P,L)=3\Rightarrow\frac{|-6-4m+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3\Rightarrow|-5-4m|=15$

$\Rightarrow -5-4m=\pm 15\Rightarrow m=-5$或$\frac{5}{2}$

但 $(-2,m)$ 在第二象限，故 $m=-5$ 不合，則 $m=\frac{5}{2}$

12. 點在直線的異側

則將點代入直線所得之值的乘積 <0

將 $(3,-2)$及$(-5,3)$ 代入直線得二者乘積為

$(6-8-3)(-10+12-3)>0$

將 $(3,-2)$及$(-5,2)$ 代入直線得二者乘積為

$(6-8-3)(-10+8-3)>0$

將 $(3,-2)$及$(4,-1)$ 代入直線得二者乘積為

$(6-8-3)(8-4-3)<0$

將 $(3,-2)$及$(3,-1)$ 代入直線得二者乘積為

$(6-8-3)(6-4-3)>0$

13. 點在圓的內部，則將 $(p+6,p-2)$ 代入圓方程式中；令其值 <20

即 $(p+6-4)^2+(p-2+6)^2<20$

$\Rightarrow(p+2)^2+(p+4)^2<20\Rightarrow p^2+6p<0$

$\Rightarrow p(p+6)<0\Rightarrow -6<p<0$

但 p 為整數，故 $p=-5,-4,-3,-2,-1$，共 5 個

14. 經由配方得：$\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{8}=1$

則 $a=3$，$b=\sqrt{8}\Rightarrow c=1$，$\because$中心 $(-1,3)$

$\Rightarrow$ 焦點為 $(-1\pm c,3)=(-1\pm 1,3)=(0,3)$或$(-2,3)$

15. $\because\tan\theta+\cot\theta=4\Rightarrow\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=4$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=4\Rightarrow \sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

又 $\sec^2\theta+\csc^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}+\dfrac{1}{\sin^2\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$

$=\dfrac{1}{(\sin\theta\cos\theta)^2}=16$

16. $\because a$、b、c 為相異自然數，又 $14=1\times2\times7$
可令 $a=1$，$b=2$，$c=7$，故原式為：
$x^3-mx^2+nx-14=(x-1)(x-2)(x-7)$
$=x^3-10x^2+23x-14$
故 $m=10$，$n=23\Rightarrow m-n=-13$

17. $\because 31^x=9=3^2\Rightarrow 31=3^{\frac{2}{x}}\cdots(1)$
$279^y=27=3^3\Rightarrow 279=3^{\frac{3}{y}}\cdots(2)$
$(2)\div(1)\Rightarrow \dfrac{279}{31}=\dfrac{3^{\frac{3}{y}}}{3^{\frac{2}{x}}}\Rightarrow 9=3^{\frac{3}{y}-\frac{2}{x}}\Rightarrow \dfrac{3}{y}-\dfrac{2}{x}=2$

18. L_1：$\sqrt{3}x+y+6=0\Rightarrow$ 斜率 $m_1=\tan\alpha=-\sqrt{3}$
$\Rightarrow \alpha=120^\circ$；$L_2$：$x-7=0\Rightarrow$ 斜率不存在 $\Rightarrow \beta=90^\circ$
故 $\alpha-\beta=120^\circ-90^\circ=30^\circ$

19. 由算幾不等式：$\dfrac{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a+2b}{3}\ge\sqrt[3]{\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}a\times 2b}$
$\Rightarrow \dfrac{9}{3}\ge\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^2b}\Rightarrow 3^3\ge\dfrac{1}{2}a^2b$，則 $a^2b\le 54$
故 a^2b 最大值為 54

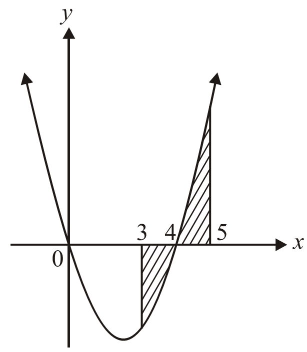
20. 利用：(任意分法)$-$(乙一張皆未得)的重複排列
$=4^4-3^4=175$

21. 由 $f'(a)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$：$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3+h)-f(3-2h)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{[f(3+h)-f(3)]-[f(3-2h)-f(3)]}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}-\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-2h)-f(3)}{h}$
$=f'(3)-(-2)\lim\limits_{-2h\to0}\dfrac{f(3-2h)-f(3)}{(-2h)}$
$=f'(3)+2f'(3)=3f'(3)=12$

22. $\int_0^4 x^2f(x)dx=\int_0^2 x^2f(x)dx+\int_2^4 x^2f(x)dx$
$=\int_0^2 x^2\cdot 2x\,dx+\int_2^4 x^2(x-3)dx=\dfrac{1}{2}x^4\Big|_0^2+\dfrac{1}{4}x^4-x^3\Big|_2^4$
$=(8-0)+[(64-64)-(4-8)]=8+4=12$

23. (1) 百位數字和：百位數字可為 1、2、3、4，而每一個百位數字皆形成 $4\times3=12$ 個三位數，故總和為
$(1+2+3+4)\times100\times12=12000$
(2) 十位數字和：十位數字可為 0、1、2、3、4，除了 0，每一個十位數字皆形成 $3\times3=9$ 個三位數，故總和為 $(1+2+3+4)\times10\times9=900$
(3) 個位數字和：個位數字可為 0、1、2、3、4，除了 0，每一個個位數字皆形成 $3\times3=9$ 個三位數，故總和為 $(1+2+3+4)\times1\times9=90$，故總和為 12990

24. $y=x^2-4x$
如右圖所示
在 $3\le x\le4$，
$y=x^2-4x$ 在 x 軸下方
在 $4\le x\le5$，
$y=x^2-4x$ 在 x 軸上方



故所圍面積為 $\int_3^4 -(x^2-4x)dx+\int_4^5 (x^2-4x)dx$
$=(-\dfrac{1}{3}x^3+2x^2)\Big|_3^4+(\dfrac{1}{3}x^3-2x^2)\Big|_4^5$
$=[(-\dfrac{64}{3}+32)-(-9+18)]+[(\dfrac{125}{3}-50)-(\dfrac{64}{3}-32)]$
$=-\dfrac{128}{3}+\dfrac{125}{3}+32\times2-9-50=4$

25. (1) 取到黑球：$\dfrac{3}{5}\times60=36$ 元
(2) 取到紅球：$\dfrac{2}{5}\times80=32$ 元
故期望值為 $36+32=68$ 元