九十九學年四技二專第五次聯合模擬考試
共同考科　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 99-5-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	B	A	A	C	A	B	C	B	D	C	C	B	A	B	D	C	A	C	A	D	D	A	D	B

1. $\because \overline{DC}$ 平分 $\angle ACB$ ，$\therefore \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DA}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{8}{5}$

則 D 點為 $\overline{BA}$ 上之內分點，由內分點公式得

$$D：\begin{cases} x=\dfrac{5\cdot 6+8(-6)}{8+5}=-\dfrac{18}{13} \\ y=\dfrac{5\cdot(-5)+8(-2)}{8+5}=-\dfrac{41}{13}\end{cases}$$

2. $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ ，$\cos(\dfrac{3}{2}\pi-\theta)=-\sin\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

$\therefore$原式 $=-\tan\theta-\sin\theta-(-\sin\theta)=-\alpha$

3. 令 $a+b=13\,k$ ，$b+c=10\,k$ ，$c+a=15\,k$

解聯立得 $\Rightarrow a=9\,k$、$b=4\,k$、$c=6\,k$

$\therefore \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{101}{108}$

4. $\because \vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}+2\vec{b}|\cdot|3\vec{a}+\vec{b}|\cdot\cos\theta$

$\Rightarrow 3|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+6(\vec{a}\cdot\vec{b})+2|\vec{b}|^2$

$=|\vec{a}+2\vec{b}|\cdot|3\vec{a}+\vec{b}|\cdot\cos\theta$ ……(1)

$\because |\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4(\vec{a}\cdot\vec{b})+4|\vec{b}|^2=40$

$\Rightarrow |\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{10}$

$|3\vec{a}+\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2+6(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=45$

$\Rightarrow |3\vec{a}+\vec{b}|=3\sqrt{5}$ 代入(1)整理得 $\theta=45°$

5. $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

$|\sin\theta-\cos\theta|=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

6. 根據餘式定理，令 $x=-1$ 代入

$[(2x-5)f(x)+(3x^2-4)h(x)]$ ，所得之值即為所求

即 $[(-2-5)f(-1)+(3-4)h(-1)]=(-7)f(-1)-h(-1)$

又 $f(-1)=-8$ ，$h(-1)=-11$ ，故所求為 $56+11=67$

7. $Z_1=3(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12})$ ，$Z_2=6(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$

(A) $Arg(Z_1\times Z_2)=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi+3\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}$

(B) $|Z_1\times Z_2|=3\times 6=18$

(C) $Z_1\times Z_2=18(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})=9+9\sqrt{3}i$

(D) $|Z_1+Z_2|\neq 8$

8. $\because Z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}$

$\Rightarrow (\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3})^n=\cos\dfrac{4n\pi}{3}+i\sin\dfrac{4n\pi}{3}$

$\because (-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)^n$ 為實數 $\Rightarrow \sin\dfrac{4n\pi}{3}=0\Rightarrow n$ 最小值為 3

9. $\begin{cases}4^x=1\Rightarrow x=0\\ 4^x=4\Rightarrow x=1\end{cases}$ ；令兩交點 $P(0,1)$ 、 $Q(1,4)$

$\overline{PQ}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

10. 原式 $=\log_3(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{7}\times\cdots\cdots\times\dfrac{79}{81})=\log_3\dfrac{1}{81}$

$=\log_3 3^{-4}=-4$

11. $\because \begin{cases}a_{10}=a_1+9d=23\\ a_{25}=a_1+24d=-22\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=50\\ d=-3\end{cases}$

$\Rightarrow a_n=a_1+(n-1)d=50-3n+3<0$

$\therefore\Rightarrow n>17.\sim$ ，$\therefore n=18$

12. $k=1+2+2^2+\cdots+2^{99}=\dfrac{1(2^{100}-1)}{2-1}=2^{100}-1$

又 $\log 2^{100}=100\times\log 2=100\times 0.301=30.1$

$\therefore \log 2^{100}$ 首數為 30，則 2^{100} 為 31 位數

而 $2^{100}-1$ 亦為 31 位數

13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{(n+2)}-\frac{1}{(n+3)}]$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{(n+2)}-\dfrac{1}{(n+3)}$

$=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+3)}]=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=3$

14. 設 $A(p,0)$ 、 $B(0,q)$ ，$\because m_{AP}\cdot m_{BP}=-1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{-p+2}\cdot\dfrac{q-1}{-2}=-1\Rightarrow q=-2p+5$

$\therefore \Delta OAB=\dfrac{1}{2}pq=\dfrac{1}{2}(-2p^2+5p)=-(p-\dfrac{5}{4})^2+\dfrac{25}{16}$

$\Rightarrow (\Delta OAB)_{\max}=\dfrac{25}{16}$

15. 令 L： $3x+2y+k=0 \Rightarrow (1,2)$ 代入得 $k=-7$

L： $\frac{3}{7}x+\frac{2}{7}y=1 \Rightarrow \therefore a-b=\frac{1}{7}$

16. (a) $|2x-7|>5 \Rightarrow x<1$ 或 $x>6$

(b) $|2x-7|\le 10 \Rightarrow -10\le 2x-7\le 10 \Rightarrow -\frac{3}{2}\le x\le \frac{17}{2}$

由(a)(b)得 $-\frac{3}{2}\le x<1$ 或 $6<x\le \frac{17}{2}$

$\therefore x=-1,0,7,8$ 四個整數

17. 圓心 $P(2,0)$ ，則 $\overline{AP}=\sqrt{(4-2)^2+3^2}=\sqrt{13}>2$ (半徑)

$\therefore A$ 在圓外；且自 A 所作切線段長

$\sqrt{\overline{AP}^2-r^2}=\sqrt{13-4}=3$

又直線 $5x-12y+16=0$ 過 A，且與圓心 P 之距離

$$=\left|\frac{10+16}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}\right|=2=r$$

$\therefore$是圓 C 之切線

故僅(C)不眞($\because \sqrt{13}<4$)

18. 令直線方程式爲 $y=mx$ ， $\begin{cases} y=mx \cdots\cdots(1) \\ 4(x-1)^2+y^2=1 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

由(1)、(2)式聯立得 $(m^2+4)x^2-8x+3=0$

$\because$直線與橢圓只相交於一點，$\therefore$ x 只有一解

故判別式 $(-8)^2-4(m^2+4)\cdot 3=0 \Rightarrow m=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

19. 若一數爲 5 的倍數則其個位數爲 0 或 5

(1) 末位排“0”，□□□0，則有 P_3^5

(2) 末位排“5”，□□□5

因首位不得爲 0，故排法計有 $P_1^4\times P_2^4\times 1$

$\therefore$總共排法依加法原理

$P_3^5+P_1^4\times P_2^4\times 1=\frac{5!}{2!}+4\times\frac{4!}{2!}\times 1$

$=5\times 4\times 3+4\times 4\times 3=60+48=108$ 種

20. 設一般項爲 $C_r^{12}(2x^3)^{12-r}(-\frac{1}{x})^r \Rightarrow 36-3r+(-r)=0$

$\Rightarrow r=9 \Rightarrow C_9^{12}(2x^3)^3(-x^{-1})^9 \Rightarrow C_9^{12}\cdot 8\cdot(-1)=-1760$

21. 已知 $P(A)=\frac{1}{4}$、$P(B)=\frac{1}{7}$、$P(C)=\frac{1}{9}$ ；三人各射一箭，至少一人射中紅心的機率，即一人射中或二人、或三人均射中紅心的機率 $=1-$(三人均未射中紅心的機率) $=1-[(1-\frac{1}{4})\times(1-\frac{1}{7})\times(1-\frac{1}{9})]=\frac{3}{7}$

22.

幣值 m_i	機率 p_i	期望值 $E=m_i\times p_i$
2 元 $\begin{cases}1\to 1\\1\to 1\end{cases}$	$\frac{C_2^{10}}{C_2^{16}}=\frac{45}{120}=\frac{3}{8}$	$2\times\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$
10 元 $\begin{cases}5\to 1\\5\to 1\end{cases}$	$\frac{C_2^{5}}{C_2^{16}}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$	$10\times\frac{1}{12}=\frac{5}{6}$
6 元 $\begin{cases}5\to 1\\1\to 1\end{cases}$	$\frac{C_1^{10}C_1^{5}}{C_2^{16}}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$	$6\times\frac{5}{12}=\frac{5}{2}$
11 元 $\begin{cases}10\to 1\\1\to 1\end{cases}$	$\frac{C_1^{10}C_1^{1}}{C_2^{16}}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$	$11\times\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$
15 元 $\begin{cases}10\to 1\\5\to 1\end{cases}$	$\frac{C_1^{5}C_1^{1}}{C_2^{16}}=\frac{5}{120}=\frac{1}{24}$	$15\times\frac{1}{24}=\frac{5}{8}$
期望值總和($\sum m_i\times p_i$)	$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{5}{2}+\frac{11}{12}+\frac{5}{8}=\frac{45}{8}$	

23. $\log_3 \lim_{x\to 3}\left|\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)}\right|=\log_3 \lim_{x\to 3}\left|\frac{(x+3)}{(x+1)}\right|$

$=\log_3\frac{3}{2}=1-\log_3 2$

24. 函數對 x 微分 $\frac{dy}{dx}=m=3x^2$

將 $x=1$ 代入得斜率 $m=3$

$\therefore y-3=3(x-1)\Rightarrow 3x-y=0\to$ 切線方程式

$y-3=-\frac{1}{3}(x-1)\Rightarrow x+3y-10=0\to$ 法線方程式

與 x 軸之交點爲 $B(0,0)$ 、 $C(10,0)$

$\therefore a\Delta ABC=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 10 & 1\\ 3 & 0 & 0 & 3\end{matrix}\right\|=15$

25. $\begin{cases} y=-x^2+4x \\ y=3x \end{cases} \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0,1$

如下圖右所示之交集區域，由定積分得

$\int_0^1(-x^2+4x)dx-\int_0^1 3x\,dx=\frac{1}{6}$