九十七學年四技二專第五次聯合模擬考試
共同考科　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 97-5-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	A	B	C	C	C	D	D	B	D	C	C	B	C	D	A	B	A	D	A	D	B	C	A	A

1. $\because f(-1)=0$，$f(3)=0$
   所以設 $y=f(x)=a(x+1)(x-3)$
   而 $f(4)=5\Rightarrow a=1$
   $\therefore f(x)=(x+1)(x-3)$ 頂點座標爲 $(1,-4)$
2. $y=\dfrac{\log 5}{\log 2}=\log_2 5\Rightarrow 5=2^y$
   所以 $4^y=(2^2)^y=(2^y)^2=5^2=25$
3. 由商數關係 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
   $\therefore \cos\theta=\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}$
4. $\sin 38^\circ=\sin(90^\circ-52^\circ)=\cos 52^\circ>\cos 82^\circ$
   $\Rightarrow a>b$，又 $c=\sec 12^\circ>1$ 且 $1>a>b>-1$
   所以 $c>a>b$
5. 原式 $\Rightarrow \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1\Rightarrow \dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$ 爲雙曲線
   取 $a=2$，$b=4\Rightarrow c^2=a^2+b^2=20$
   $\Rightarrow c=2\sqrt{5}$ 雙曲線的
   ① 正焦弦長 $\dfrac{2b^2}{a}=16$
   ② 焦點爲 $(\pm 2\sqrt{5},0)$
   ③ 貫軸長 $2a=4$
   ④ 漸近線爲 $2x\pm y=0$
6. $\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$
   因 $\sin\alpha=\dfrac{13}{14}$，$\sin\beta=\dfrac{11}{14}$
   所以 $\cos\alpha=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$，$\cos\beta=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$
   $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
   $=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{14}-\dfrac{13}{14}\cdot\dfrac{11}{14}=-\dfrac{1}{2}$
   而 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi\Rightarrow \alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{3}$
7. $A(-1,2)$ 爲圓 C 的圓心，點 $P(3,1)$ 在圓 C 上
   $\overline{PQ}$ 是圓的直徑，則
   (A) $\overline{PQ}=2\overline{AP}=2\sqrt{(-1-3)^2+(2-1)^2}=2\sqrt{17}$
   (B) A 點爲 $\overline{PQ}$ 的中點所以 Q 點的坐標爲 $(-5,3)$
   (C) 圓 C 的方程式爲 $(x+1)^2+(y-2)^2=17$
   (D) 過 Q 點半徑的斜率爲 $\dfrac{3-2}{-5-(-1)}=-\dfrac{1}{4}$
   所以過 Q 點與圓 C 相切的切線斜率爲 4
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-3^n}{12^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4^n}{12^n}-\frac{3^n}{12^n})$
   $\displaystyle=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\frac{1}{3})^n-(\frac{1}{4})^n\right]=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$
9. $\because f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}$
   $=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})$
   所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(12)$
   $=\dfrac{1}{2}[(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})$
   $+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{23})]=\dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{25})=2$
10. 圓心 $(0,0)$ 與直線 $x+y=2$ 的距離爲
   $d=\dfrac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，而半徑爲 $\sqrt{5}$
   所以兩個交點的距離爲 $2\sqrt{\sqrt{5}^2-\sqrt{2}^2}=2\sqrt{3}$
11. 由柯西不等式 $(a^2+b^2+c^2)(1^2+(-2)^2+2^2)$
   $\geq(1\cdot a+(-2)\cdot b+2\cdot c)^2$，$\because a^2+b^2+c^2=1$
   $\therefore 1\cdot(1+4+4)\geq(a-2b+2c)^2$
   $\Rightarrow (a-2b+2c)^2\leq 9\Rightarrow -3\leq a-2b+2c\leq 3$
   所以 $M=3$，$m=-3$
12. x^5y^3 項的係數爲 $C^8_3\cdot 2^3=448$
13. $\log M=4.5428=4+0.5428$

$=\log 10^4+\log 3.49=\log 3.49\cdot 10^4$

所以 $M=34900$

14.

$$\begin{array}{r|l|l} x^2-x+1 & x^4-x^3+ax^2-x+b & x^2+1 \\ & \underline{x^4-x^3+x^2} & \\ & (a-1)x^2-x+b & \\ & \underline{x^2-x+1} & \\ & 0 & \end{array}$$

所以 $a=2$，$b=1$，$a-b=1$

15. $\cos\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{0-2a}{\sqrt{\dfrac{1}{2}+a^2}\sqrt{0^2+2^2}}$

$\Rightarrow \dfrac{-\sqrt{2}}{2}=\dfrac{-2a}{2\sqrt{\dfrac{1}{2}+a^2}} \Rightarrow -\sqrt{2}=\dfrac{-2a}{\sqrt{\dfrac{1}{2}+a^2}}$

$\Rightarrow 4a^2=2(\dfrac{1}{2}+a^2) \Rightarrow 2a^2=1$

$\Rightarrow a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (因 $a>0$)

所以 $\log_2 a=\log_2\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-1}{2}$

16. 可行解區域的端點 $(2,-2)$、$(4,5)$ 及 $(-2,2)$

$f(2,-2)=2-(-2)=4$，$f(4,5)=4-5=-1$

$f(-2,2)=-2-2=-4$

所以最大值 $M=4$，最小值 $m=-4$

$M+m=0$

17. $\because z=\dfrac{2i}{1-\sqrt{3}i}=\dfrac{2(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)}{2(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)}$

$=\cos(-210^\circ)+i\sin(-210^\circ)=\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ$

$z^6=\cos 900^\circ+i\sin 900^\circ$

$=\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ=-1$

18. ΔABC 與 ΔDEF 為相似三角形

所以 $\angle A=\angle D$

$\because \overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{EF}=\overline{AC}:\overline{DF}=2:3$

$\therefore \overline{DE}=\dfrac{3}{2}\overline{AB}$，$\overline{DF}=\dfrac{3}{2}\overline{AC}$

ΔDEF 的面積 $=\dfrac{1}{2}\overline{DE}\cdot\overline{DF}\cdot\sin D$

$=\dfrac{1}{2}\cdot(\dfrac{3}{2}\overline{AB})\cdot(\dfrac{3}{2}\overline{AC})\cdot\sin A$

$=\dfrac{9}{4}(\dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin A)=\dfrac{9}{4}\cdot 200=450$

19. 解一：直線 $x-y+18=0$ 的斜率為 1

斜角為 45°

$x+\sqrt{3}y+20=0$ 的斜率為 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，斜角為 150°

所以兩直線之交角為 $150^\circ-45^\circ=105^\circ$

或 $180^\circ-105^\circ=75^\circ$

解二：$\because \tan\theta=\dfrac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\dfrac{1-(-\dfrac{1}{\sqrt{3}})}{1+1\cdot(-\dfrac{1}{\sqrt{3}})}$

$=\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$

$\therefore \theta=75^\circ$，另一交角為 $180^\circ-75^\circ=105^\circ$

20. $f(x)=x^3-3x^2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x$

$f''(x)=6x-6 \Rightarrow f'(2)+f''(-1)$

$=(3\cdot 2^2-6\cdot 2)+(-6-6)=-12$

21. 任選兩支鞋子，這兩支鞋子恰好成為一雙的機率為 $\dfrac{C_1^5}{C_2^{10}}=\dfrac{5}{45}=\dfrac{1}{9}$

22. x 的期望值為

$10\times 0.1+20\times 0.2+30\times 0.3+40\times 0.4=30$

23. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{t+4}-2}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(\sqrt{t+4}-2)(\sqrt{t+4}+2)}{t(\sqrt{t+4}+2)}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t+4-4}{t(\sqrt{t+4}+2)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{t+4}+2}=\dfrac{1}{4}$

24. 設 $\dfrac{d}{dx}F(t)=f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$

則由微積分的基本定理

$\int_0^x\dfrac{dt}{1+t^2}=\int_0^x f(t)dt=F(t)\Big|_0^x=F(x)-F(0)$

原式 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x\dfrac{dt}{1+t^2}=\dfrac{d}{dx}(F(x)-F(0))$

$=\dfrac{d}{dx}F(x)-0=f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

25. $\int_1^2\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^4}dx=\int_1^2(1+2x^{-2}-3x^{-4})dx$

$=(x-2x^{-1}+x^{-3})\Big|_1^2$

$=(2-2\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8})-(1-2+1)=\dfrac{9}{8}$