102 學年四技二專第二次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 102-2-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	A	C	D	C	D	D	D	B	B	A	B	C	A	C	D	C	B	D	D	C	A	B	A	B

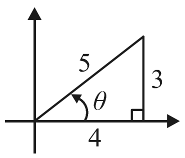
1. L_1：$y=2(x-\frac{1}{2})\Rightarrow 2x-y=1$ ……①

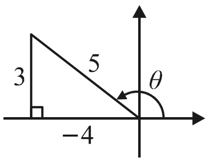
L_2：$\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}=1\Rightarrow x-2y=2$ ……②

(A) 解①②聯立，得交點 $(0,-1)$

(B) $m_1=2$、$m_2=\frac{1}{2}$，$\tan\theta=\pm\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}=\pm\frac{3}{4}$

又 $\theta\in$ I 或 II

$\Rightarrow$ 

或 

可得 $\sin\theta=\frac{3}{5}$

(C) 垂直 L_1 之直線斜率爲 $\frac{-1}{m_1}=-\frac{1}{2}$，又過 $(0,-1)$

故所求爲 $y+1=-\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow x+2y+2=0$

(D) 任兩相異直線的兩條交角平分線必互相垂直

故(C)爲錯誤

2. 設 $\overline{AB}$ 之垂直平分線爲 L，$\because L$ 過 $O(4,1)$

$\therefore L$：$y-1=2(x-4)\Rightarrow 2x-y-7=0$

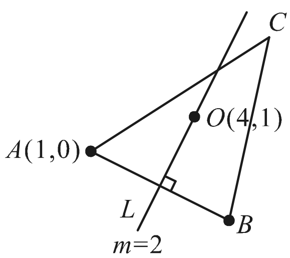
設 $\overleftrightarrow{AB}$：$x+2y+k=0$，以 $A(1,0)$ 代入得 $k=-1$

$\therefore\overleftrightarrow{AB}$：$x+2y-1=0$，可得 $\overline{AB}$ 中點爲

$\begin{cases}\overleftrightarrow{AB}：x+2y-1=0\\ L：2x-y-7=0\end{cases}\Rightarrow(x,y)=(3,-1)$

設 $B(a,b)$，由 $\overline{AB}$ 中點 $(\frac{1+a}{2},\frac{b+0}{2})=(3,-1)$

$\Rightarrow a=5$、$b=-2$，故 $B(5,-2)$



3. (A) 開口向下 $\Rightarrow a<0$

又頂點 $(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a})$ 在 y 軸左側

$\Rightarrow -\frac{b}{2a}<0$，$\therefore b<0$

(B) 由圖形與 $x=1$ 直線的交點在 x 軸下方可知 $a+b+c=f(1)<0$

(C) 由圖形與 x 軸交相異兩點得 $b^2-4ac>0$

(D) 由根與係數關係可得 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}<0$

故選(C)

4. $f(x)$ 之週期 $T_1=\frac{\pi}{\frac{1}{3}}=3\pi$，又 $|\sin x|$ 之週期爲 π

得 $g(x)$ 之週期 T_2 爲 $\frac{\pi}{\left|-\frac{1}{2}\right|}=2\pi$

故 $T_1+T_2=3\pi+2\pi=5\pi$

5. (A) $\sin 764^\circ=\sin(720^\circ+44^\circ)=\sin 44^\circ<1$

(B) $\cos(-316^\circ)=\cos(-316^\circ+360^\circ)=\cos 44^\circ<1$

(C) $\tan 586^\circ=\tan(360^\circ+226^\circ)=\tan 226^\circ$

$=\tan(270^\circ-44^\circ)=\cot 44^\circ>1$

(D) $\cot 136^\circ=\cot(180^\circ-44^\circ)=-\cot 44^\circ<0$

tan586°最大，故選(C)

6. $\because\tan\theta+\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=2.5\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=\frac{2}{5}$

$\therefore(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\times\frac{2}{5}=\frac{9}{5}$

故 $\sin\theta+\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{9}{5}}=\pm\frac{3\sqrt{5}}{5}$

(θ 爲第一象限角，負不合)

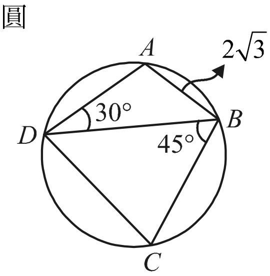
7. $\because\Delta ABD$ 與 ΔBCD 共用外接圓

設其外接圓半徑爲 R，則

由正弦定理可得

$\frac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{CD}}{\sin 45^\circ}=2R$

$\Rightarrow\frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{\overline{CD}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow\overline{CD}=2\sqrt{6}$



8. 由餘式定理可知所求爲 $f(\sin 10^\circ)$

$=8\sin^4 10^\circ-6\sin^2 10^\circ+1$

$=-2\sin 10^\circ(3\sin 10^\circ-4\sin^3 10^\circ)+1$

$=-2\sin 10^\circ\times\sin 30^\circ+1=-2\sin 10^\circ\times\frac{1}{2}+1$

$=1-\sin 10^\circ$

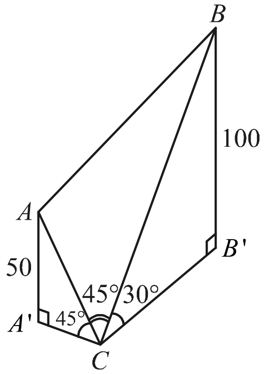
9. 如圖，$\Delta AA'C$ 中可得 $\overline{AC}=50\sqrt{2}$

$\Delta BB'C$ 中可得 $\overline{BC}=200$

故 ΔABC 中，$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AC}\times\overline{BC}\cos 45°$

$\Rightarrow \overline{AB}^2=5000+40000-2\times 50\sqrt{2}\times 200\times\frac{1}{\sqrt{2}}=25000$

故 $\Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{25000}=50\sqrt{10}$ 公尺



10. $\because \overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{RQ}=(4,4)-(1,7)=(3,-3)$

故 ΔPQR 之周長 $=|\overrightarrow{PQ}|+|\overrightarrow{QR}|+|\overrightarrow{PR}|$

$=\sqrt{4^2+4^2}+\sqrt{1^2+7^2}+\sqrt{3^2+(-3)^2}$

$=4\sqrt{2}+5\sqrt{2}+3\sqrt{2}=12\sqrt{2}$

11. $\because \vec{u}\perp\vec{v}$，$\therefore \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$\Rightarrow(-\cos 75°)\cos\theta+\sin 75°\sin\theta=0$

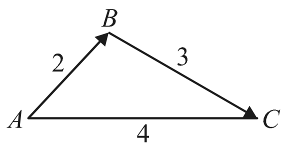
$\Rightarrow \cos 75°\cos\theta-\sin 75°\sin\theta=0 \Rightarrow \cos(75°+\theta)=0$

又 $0°<\theta<90° \Rightarrow 75°<75°+\theta<165°$

可得 $75°+\theta=90° \Rightarrow \theta=15°$

12. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos(\pi-\angle B)$

$=\overline{AB}\times\overline{BC}\times(-\cos B)=2\times 3\times(-\frac{2^2+3^2-4^2}{2\times 2\times 3})=\frac{3}{2}$



13. 令 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Rightarrow 2x+1=\sqrt{5}$

$\underset{\text{平方}}{\Rightarrow} 4x^2+4x+1=5 \Rightarrow x^2+x-1=0$

由長除法可得

$f(x)=2x^4+2x^3-x^2+x+1=(x^2+x-1)(2x^2+1)+2$

故 $f(\frac{\sqrt{5}-1}{2})=2$

14. 由連續綜合除法

$$
\begin{array}{r|l}
\begin{array}{rrrr} 2 & -3 & +2 & -1 \\ & -1 & +2 & -2 \\ \hline 2\ \ 2 & -4 & +4 & \\ 1 & -2 & +2 & \\ & -\frac{1}{2} & +\frac{5}{4} & \\ \hline 1 & -\frac{5}{2} & +\frac{13}{4} & \end{array} & \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \\ \\ -3 \end{array}
\end{array}
$$

可得 $c=\frac{13}{4}$、$d=-3$，故 $c+d=\frac{13}{4}-3=\frac{1}{4}$

15. 由根與係數的關係可得 $\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\beta=-3\end{cases}$

$\because \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

$=\frac{1-2(-3)}{(-3)^2}=\frac{7}{9}$

且 $\frac{1}{\alpha^2}\times\frac{1}{\beta^2}=\frac{1}{(\alpha\beta)^2}=\frac{1}{(-3)^2}=\frac{1}{9}$

故所求為 $x^2-(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2})x+\frac{1}{\alpha^2}\times\frac{1}{\beta^2}=0$

$\Rightarrow x^2-\frac{7}{9}x+\frac{1}{9}=0 \Rightarrow 9x^2-7x+1=0$

16. 原式 $\Rightarrow 9x^2-11x+4=(ax+b)(x-2)+c(2x-1)^2$

令 $x=2$ 代入 $\Rightarrow 18=9c \Rightarrow c=2$

令 $x=0$ 代入 $\Rightarrow 4=-2b+2 \Rightarrow b=-1$

令 $x=1$ 代入 $\Rightarrow 2=(a-1)(-1)+2 \Rightarrow a=1$

故 $a+b+c=2$

17. 所求 $=\begin{vmatrix}2a & d & 2\\ 2b & e & 3\\ 2c & f & 4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a & d & 2\\ b & e & 3\\ c & f & 4\end{vmatrix}$

$=2\left(\begin{vmatrix}a & d & 1\\ b & e & 1\\ c & f & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & d & 1\\ b & e & 2\\ c & f & 3\end{vmatrix}\right)=2(3+2)=10$

18. 原式 $\Rightarrow \begin{cases}2x-(a+1)y=0\\ -(a+4)x+9y=0\end{cases}$ 有 $x=0$、$y=0$ 之外的解

$\Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix}2 & -(a+1)\\ -(a+4) & 9\end{vmatrix}=0 \Rightarrow a^2+5a-14=0$

$\Rightarrow (a+7)(a-2)=0 \Rightarrow a=-7$ 或 2

19. 所求即 $|\bar{z}|=|z|=\sqrt{1^2+1^2}\times\sqrt{4^2+(-3)^2}\times\sqrt{8^2+15^2}$

$=\sqrt{2}\times 5\times 17=85\sqrt{2}$

20. 設另一根為 α，由根與係數關係，可得

$\begin{cases}(2-i)+\alpha=-\frac{k}{2} & \cdots\cdots ① \\ (2-i)\alpha=-2+i & \cdots\cdots ②\end{cases}$

由② $\Rightarrow \alpha=\frac{-2+i}{2-i}=-1$ 代入①

$\Rightarrow (2-i)-1=-\frac{k}{2} \Rightarrow k=-2+2i$

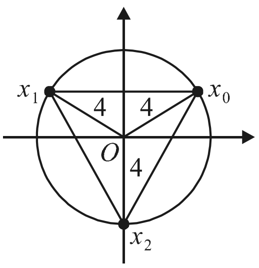
21. $\because x^3=64i=64(\cos 90°+i\sin 90°)$ $\therefore$ 三根為

$x_k=4(\cos\frac{90°+k\times 360°}{3}+i\sin\frac{90°+k\times 360°}{3})$

$k=0$、1、2

故所求即半徑 4 的圓內接正三角形

面積 $3(\frac{1}{2}\times 4\times 4\sin 120°)=12\sqrt{3}$



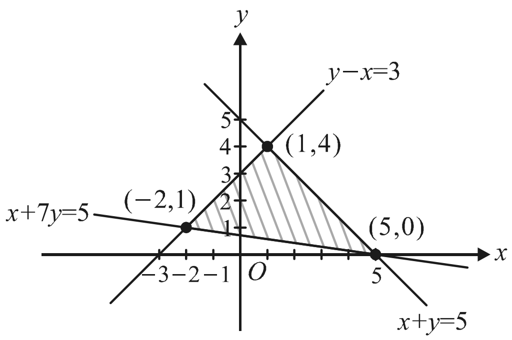
22. 原式 $\overset{\text{平方}}{\Rightarrow} x^2+2x+1>49x^2-28x+4$

$\Rightarrow 16x^2-10x+1<0$

$\Rightarrow (2x-1)(8x-1)<0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{8}<x<\dfrac{1}{2}$

23. 可行解區域如圖所示



令 $f(x,y)=2x-y$，將各頂點代入得

$f(1,4)=2-4=-2$ 、 $f(5,0)=10$ 、 $f(-2,1)=-5$

故最小值爲 -5

24. 由算幾不等式

$$\frac{a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}}{3}\ge\sqrt[3]{a\times\frac{b}{2}\times\frac{b}{2}}=\sqrt[3]{\frac{ab^2}{4}}=\sqrt[3]{\frac{256}{4}}=4$$

$\therefore a+b=a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{b}{2}\ge 12$，若 $a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{b}{2}=12$

需 $a=\dfrac{b}{2}=\dfrac{b}{2}=4\Rightarrow$ 即 $a=4$ 、 $b=8$

滿足 $ab^2=256$，檢驗等號成立之條件正確

故 $a+b$ 之最小值爲 12

25. 由柯西不等式

$$(\sqrt{a}^2+\sqrt{3b}^2)((\frac{2}{\sqrt{a}})^2+(\sqrt{\frac{3}{b}})^2)\ge(\sqrt{a}\times\frac{2}{\sqrt{a}}+\sqrt{3b}\times\sqrt{\frac{3}{b}})^2$$

$\Rightarrow (a+3b)(\dfrac{4}{a}+\dfrac{3}{b})\ge(2+3)^2=25$

檢驗上式等號成立之條件

$\dfrac{\sqrt{a}}{\frac{2}{\sqrt{a}}}=\dfrac{\sqrt{3b}}{\sqrt{\frac{3}{b}}}\Rightarrow\dfrac{a}{2}=b\Rightarrow a=2b$ 代入求式

得 $(2b+3b)(\dfrac{4}{2b}+\dfrac{3}{b})=5b\times\dfrac{5}{b}=25$

故所求之最小值爲 25