104 學年度四技二專第三次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 104-3-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	D	A	B	B	D	B	A	D	A	C	D	C	A	B	C	D	A	B	C	A	D	C	B	D

1. $\because x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow (x-5)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=1$，5
且$\alpha>\beta$，$\therefore \alpha=5$，$\beta=1 \Rightarrow \alpha^2-\beta^2=24$
2. 設x^5項的係數爲a
觀察$(5x^4-3x^2+1)(7x^3+2x^2-5x+8)$的展式，得知
$ax^5=(5x^4)(-5x)+(-3x^2)(7x^3)=-25x^5-21x^5=-46x^5$
$\therefore a=-46$
3. $\because \overline{PR}=\overline{QR} \Rightarrow \overline{PR}^2=\overline{QR}^2$
$\Rightarrow (5-2)^2+(4-k)^2=(5-k)^2+(4+2)^2$
$\Rightarrow 9+16-8k+k^2=25-10k+k^2+36$
$\Rightarrow 2k=36 \Rightarrow k=18$
4. $\because \frac{1}{4}<x<3 \Rightarrow (x-\frac{1}{4})(x-3)<0$
$\Rightarrow (4x-1)(x-3)<0 \Rightarrow 4x^2-13x+3<0$
$\Rightarrow -4x^2+13x-3>0$
$\therefore a=-4$，$b=13 \Rightarrow a-b=-17$
5. $\frac{45\times14+55\times10+65\times4+75\times2}{30}=\frac{1590}{30}=53$分
6. $3\times3\times3\times3=81$
7. 設P(甲得第一名)$=x$
$\Rightarrow P$(乙得第一名)$=2x$
P(丙得第一名)$=3(2x)=6x$
$\because x+2x+6x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{9}$
$\therefore P$(丙得第一名)$=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$
8. 設應扣x分
則得分的期望值$=0 \Rightarrow \frac{1}{4}\times6+\frac{3}{4}\times(-x)=0$
$\Rightarrow 6-3x=0 \Rightarrow x=2$
9. $\because \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(3+x,3+y)$
又$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$，$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
$\Rightarrow (3+x)\times5+(3+y)\times2=0$
$\Rightarrow 5x+2y=-21$
10. $\log(5^a\times2)=1+69\log5$
$\Rightarrow a\log5+\log2=1+69\log5$
$\Rightarrow (a-69)\log5=1-\log2$
$\Rightarrow (a-69)\log5=\log5 \Rightarrow a=70$
11. 用柯西不等式
$(x^2+y^2)[1^2+(-3)^2]\ge(x-3y)^2$
$\Rightarrow 10(x^2+y^2)\ge10^2 \Rightarrow x^2+y^2\ge10$
$\therefore x^2+y^2$的最小值等於 10
【另解】$\because x-3y=10 \Leftrightarrow x=3y+10$
$\therefore x^2+y^2=(3y+10)^2+y^2=10y^2+60y+100$
$=10(y+3)^2+10\ge10$
$\therefore x^2+y^2$的最小值等於 10
12. $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}=(3,4)$，$\vec{b}=\overrightarrow{PR}=(8,6)$
$\vec{a}$在$\vec{b}$上的正射影$=(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2})\vec{b}=(\frac{3\cdot8+4\cdot6}{8^2+6^2})\vec{b}$
$=\frac{48}{100}(8,6)=(\frac{96}{25},\frac{72}{25})$
13. $\because 5\overline{AP}=\overline{AB} \Rightarrow \overline{AP}:\overline{PB}=1:4$
P點坐標爲$(\frac{4\cdot4+1\cdot(-1)}{1+4},\frac{4\cdot(-7)+1\cdot3}{1+4})$
$=(3,-5)=(m,n)$
$\Rightarrow m=3$，$n=-5 \Rightarrow m-n=8$
14. 設a、b爲實數，$Z_1=5+ai$，$Z_2=b+3i$
$\because 5+b=7 \Rightarrow b=2$，$a-3=8 \Rightarrow a=11$
$\therefore Z_1\times Z_2=(5+11i)(2+3i)=-23+37i$
15. $\begin{cases}2x-y-3z=-6\cdots\cdots①\\x-2y+z=3\cdots\cdots②\\3x+y-2z=1\cdots\cdots③\end{cases}$
$(①+③)\div5 \Rightarrow x-z=-1\cdots\cdots④$
$①\times2-② \Rightarrow 3x-7z=-15\cdots\cdots⑤$
$④\times3-⑤ \Rightarrow 4z=12 \Rightarrow z=3$
代入④ $\Rightarrow x=2$
代入③ $\Rightarrow y=1$
$\therefore a+b+c=6$
16. $|\frac{(\sqrt{3}+i)^5(8+6i)}{-4+3i}|=\frac{|\sqrt{3}+i|^5|8+6i|}{|-4+3i|}$
$=\frac{(\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2})^5\sqrt{8^2+6^2}}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}=64$
17. $\because 999^x=9 \Rightarrow 999=9^{\frac{1}{x}}\cdots\cdots①$
同理，由$37^y=9 \Rightarrow 37=9^{\frac{1}{y}}\cdots\cdots②$
$①\div② \Rightarrow 999\div37=9^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} \Rightarrow 27=9^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$
$\Rightarrow 3^3=(3^2)^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} \Rightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{3}{2}$
18. ΔABC的面積$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
其中$s=\frac{a+b+c}{2}$，若ΔABC的內切圓半徑爲r

則 $\Delta = rs$ ，$s=\dfrac{7+8+9}{2}=12$

$\Delta=\sqrt{12\times5\times4\times3}=12\sqrt{5}$ ，$r=\dfrac{12\sqrt{5}}{12}=\sqrt{5}$

19. 令 $7^x=t$
原式 $\Rightarrow 7t^2+13t-2=0 \Rightarrow (7t-1)(t+2)=0$
$\Rightarrow t=\dfrac{1}{7}$ ，-2 (不合，$\because 7^x>0$) $\Rightarrow 7^x=7^{-1}\Rightarrow x=-1$

20. $\because 2=a_1+3(-2)\Rightarrow a_1=8$
$\dfrac{n[2\cdot8+(n-1)(-2)]}{2}=-22$
$\Rightarrow n[16-2n+2]=-44 \Rightarrow 2n^2-18n-44=0$
$\Rightarrow n^2-9n-22=0\Rightarrow (n-11)(n+2)=0$
$\Rightarrow n=11$ 或 -2 (不合)

21. $\because 6x^2+5x-4=0\Rightarrow(2x-1)(3x+4)=0$
$\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ 或 $-\dfrac{4}{3}$ ($\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ ，$\because -1\le\sin\theta\le1$)
$\therefore \cos2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{2}$

22. $\because \overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=300$
使用餘弦定理
$\overline{AB}=\sqrt{300^2+300^2-2\cdot300\cdot300\cdot\cos120^\circ}$
$=300\sqrt{1+1+1}=300\sqrt{3}$ 公尺

23. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ x+y & y+z & z+x \\ p+q & q+r & r+p \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2a+2b+2c & b+c & c+a \\ 2x+2y+2z & y+z & z+x \\ 2p+2q+2r & q+r & r+p \end{vmatrix}$

$\times1$ 第2行乘1加到第1行
$\times1$ 第3行乘1加到第1行
$\times(-1)$ 第2行乘 -1 加到第1行

$=2\begin{vmatrix} a+b+c & b+c & c+a \\ x+y+z & y+z & z+x \\ p+q+r & q+r & r+p \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ x & y+z & z+x \\ p & q+r & r+p \end{vmatrix}$

第1行乘 -1 加到第3行 $\times(-1)$

$=2\begin{vmatrix} a & b+c & c \\ x & y+z & z \\ p & q+r & r \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}=28$

第3行乘 -1 加到第2行 $\times(-1)$

$\Rightarrow\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}=14$

24. 用餘弦定理
$\cos B=\dfrac{5^2+7^2-x^2}{2\cdot5\cdot7}=\dfrac{7^2+15^2-14^2}{2\cdot7\cdot15}$
$\Rightarrow 74-x^2=26\Rightarrow x^2=48\Rightarrow x=\pm\sqrt{48}$ (負不合)
$\therefore x=4\sqrt{3}$

25. 先將七件相異物分成 5 堆後，再分給甲、乙、丙、丁、戊等 5 人
(1) 分成 $(3,1,1,1,1)\to C_3^7\cdot C_1^4\cdot C_1^3\cdot C_1^2\cdot C_1^1\cdot\dfrac{5!}{4!}$
$=\dfrac{7!}{3!\cdot4!}\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot5=4200$
(2) 分成 $(2,2,1,1,1)\to C_2^7\cdot C_2^5\cdot C_1^3\cdot C_1^2\cdot C_1^1\cdot\dfrac{5!}{2!\cdot3!}$
$=\dfrac{7!}{2!\cdot5!}\cdot\dfrac{5!}{2!\cdot3!}.3\cdot2\cdot1\cdot10=12600$
由(1)(2)可得共 $4200+12600=16800$