101 學年四技二專第五次聯合模擬考試
共同考科　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 101-5-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	A	D	A	B	C	D	B	A	D	B	A	C	C	B	D	A	C	C	C	B	A	B	A	D

1. 成對的 剩3女選2女

$\dfrac{C_1^4 \cdot C_2^3}{C_1^4 \cdot (C_2^3 \cdot C_1^2 \cdot C_1^2)} = \dfrac{1}{4}$

成對的 其餘2人不成對，挑2對後，再各選1人

2. $\dfrac{4}{3+4+1} \times 3 = \dfrac{3}{2}$

3. $\because \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ 不存在，(B) ×

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 不連續，(A) ×

又 $f(x) = \begin{cases} 1，x>0 \\ -1，x<0 \end{cases}$，$\int_{-4}^{-1} -1dx = -3$，(C) ×

$f'(4) = 0$，(D) ○

4. 令 $x^3+1=0$，$x=-1$

原式 $= \int_{-2}^{-1} -(x^3+1)dx + \int_{-1}^{1} (x^3+1)dx$

$= (-\dfrac{x^4}{4} - x)\Big|_{-2}^{-1} + (\dfrac{x^4}{4}+x)\Big|_{-1}^{1}$

$= (-\dfrac{1}{4}+1) - (-4+2) + (\dfrac{1}{4}+1) - (\dfrac{1}{4}-1) = \dfrac{19}{4}$

5. 原式 $= (\dfrac{1}{3}-1+2)\cdot(2-\dfrac{5}{3}) = \dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{9}$

6. $\begin{cases} \alpha+\beta=-16<0 \\ \alpha\cdot\beta=9>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha<0 \\ \beta<0 \end{cases}$

(A) $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 256-18 = 238$

(B) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta} = \dfrac{\beta+\alpha}{\alpha\beta} = -\dfrac{16}{9}$

(C) $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2 = \alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}\, i^2$

$= -16+2\times\sqrt{9}\times(-1) = -22$

(D) $\alpha^2+16\alpha+9=0 \Rightarrow 2\alpha^2+22\alpha+18=0$

$\Rightarrow -2\alpha^2-32\alpha=18$

7. 令前 10 項和 $= a_1 = 63$

前 20 項和 $= a_1+a_2 = 84 \Rightarrow a_2 = 21$

$\therefore r = \dfrac{1}{3}$，則所求 $= 63\times(\dfrac{1}{3})^{4-1} = 63\times\dfrac{1}{27} = \dfrac{7}{3}$

8. (A) $2^4 = 16$ 個

(B) $n(T-S) = n(T) - n(T\cap S) = 33 - [\dfrac{99}{6}] = 17$

(C) ① $Z=0 \Rightarrow x+2y=10$

x	10	8	6	4	2	0
y	0	1	2	3	4	5

6 組

② $Z=1 \Rightarrow x+2y=7$

x	7	5	3	1
y	0	1	2	3

4 組

③ $Z=2 \Rightarrow x+2y=4$

x	4	2	0
y	0	1	2

3 組

④ $Z=3 \Rightarrow x+2y=1$

x	1
y	0

1 組

$6+4+3+1=14$

(D) $C_3^5+C_4^5+C_5^5=16$

9. 原式 $= \log_{27}(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}})$

$= \log_{27}[(\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{100}-\sqrt{99})]$

$= \log_{27} 9 = \dfrac{2}{3}$

10. 令 $A(3,-4)$、$B(-1,-6)$、$P(a,b)$，則原式即為 $\overline{PA}=\overline{PB}$ 之所有 P 點，也就是 $\overline{AB}$ 的垂直平分線

① $\overline{AB}$ 中點 $(\dfrac{3+(-1)}{2}, \dfrac{-4+(-6)}{2}) = (1,-5)$

② $m_{\overline{AB}} = \dfrac{-4-(-6)}{3-(-1)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow m=-2$

③ 垂直平分線：$y-(-5) = -2(x-1) \Rightarrow 2x+y=-3$

x	10	$\frac{-3}{2}$
y	-3	1

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\times 3\times\dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{4}$

11. 若 $a=1 \Rightarrow \begin{cases} L_1：4x+3y=6 \\ L_2：4x+3y=6 \end{cases} \Rightarrow$ 重合，無限多個交點

且通過 $(3,-2)$

12. $(4,-2)$ 代入 $k=6\times 6=36$

$\Rightarrow 4x^2-8x-9y^2-36y-32=36$

$4(x-1)^2-9(y+2)^2=36 \Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{9} - \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$

$a^2=9$，$a=3$，則 $\left|\overline{PA}-\overline{PB}\right| = 2a = 6$

13. $f(\theta) = 2(1-2\sin^2\theta) - 3\sin\theta + 5 = -4\sin^2\theta - 3\sin\theta + 7$

$= -4[\sin^2\theta + \dfrac{3}{4}\sin\theta + (\dfrac{3}{8})^2] + 7 + \dfrac{9}{16}$

$= -4(\sin\theta+\dfrac{3}{8})^2 + \dfrac{121}{16}$，但 $0\le\theta\le\pi \Rightarrow 0\le\sin\theta\le 1$

$\therefore$ 當 $\sin\theta=0$，有 $\max=7$

14. ① $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{5}{13} \Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{12}{13}$

② $(\cos\beta, \cot\beta) \in (-,+) \Rightarrow \beta \in$ Ⅲ

$\cos\beta=\dfrac{-2}{\sqrt{13}}\Rightarrow\sin\beta=\dfrac{-3}{\sqrt{13}}$

$\therefore\sin(\alpha-\beta)=(\dfrac{5}{13})(\dfrac{-2}{\sqrt{13}})-(\dfrac{12}{13})(\dfrac{-3}{\sqrt{13}})$

$=\dfrac{26}{13\sqrt{13}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

15. (A) $PAOB$ 外接圓直徑爲

$\overline{OP}=\sqrt{(2-(-1))^2+(-2-2)^2}=5$

(B) 最近距離$=\overline{OP}-r=5-3=2$

最遠距離$=\overline{OP}+r=5+3=8$，$8\times2=16$

(C) $\overline{AB}=2\times\dfrac{\overline{AO}\times\overline{PA}}{\overline{PO}}=2\times\dfrac{3\times4}{5}=\dfrac{24}{5}$

(D) 切線段長

$\overline{PA}=\sqrt{(2+1)^2+(-2-2)^2-9}=\sqrt{25-9}=4$

16. 原式$\Rightarrow 8-x(x+2)=x^2-4$，$2x^2+2x-12=0$

$x^2+x-6=0$，$x=-3$，2(不合)，所有根和$=-3$

17. 原式$=5\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-1}{4})^n+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{4})^n=5\cdot\frac{\frac{-1}{4}}{1-(\frac{-1}{4})}+\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}$

$=5\times(\dfrac{-1}{5})+3=2$

18. (A) ×，$\tan71°>1>\sin71°$

(B) ×，$\cos(270°-\theta)=-\sin\theta$

(C) ○，原式$=\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta+1}{\cos\theta(\sin\theta+1)}$

$=\dfrac{2(\sin\theta+1)}{\cos\theta(\sin\theta+1)}=\dfrac{2}{\cos\theta}=2\sec\theta$

(D) ×，應爲$\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$

19. 最大邊$=\overline{AB}=\sqrt{6}\Rightarrow$最大角$=\angle C$

$\cos C=\dfrac{2^2+(\sqrt{3}-1)^2-\sqrt{6}^2}{2\cdot2\cdot(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{4+3-2\sqrt{3}+1-6}{4(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{2(1-\sqrt{3})}{4(\sqrt{3}-1)}=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore\angle C=120°$

20. 可令 $\vec{a}=(-\sqrt{3},1)$，$\vec{b}=(\sqrt{3},0)$

$\Rightarrow 2\vec{a}-\vec{b}=(-3\sqrt{3},2)$，$5\vec{a}+k\vec{b}=(-5\sqrt{3}+\sqrt{3}k,5)$

$\because$垂直，$\therefore(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(5\vec{a}+k\vec{b})=0\Rightarrow45-9k+10=0$

$k=\dfrac{55}{9}$

21. 原式 $=\begin{vmatrix}1&-3&-5\\4&-5&-6\\8&-9&-10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-3&0\\4&-5&0\\8&-9&0\end{vmatrix}=0$ （第1行×1加至第3行，第2行×2加至第3行）

22. 利用算幾不等式 $\dfrac{8a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}}{3}\ge\sqrt[3]{(8a)(\frac{b}{2})(\frac{b}{2})}$

$\Rightarrow\dfrac{15}{3}\ge\sqrt[3]{2ab^2}\Rightarrow125\ge2ab^2\Rightarrow ab^2\le\dfrac{125}{2}$

即最大值$=\dfrac{125}{2}$

23. 所求＝任意組合－Howard、Gasol同時被選中

$=C_5^{12}-C_{5-2}^{12-2}=792-120=672$

24. 即 $f'(x)=3x^2+18x+k=0$ 時之兩根爲 α、2α

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\alpha=\dfrac{-18}{3}\\ \alpha\cdot2\alpha=\dfrac{k}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-2\\k=24\end{cases}$

$\therefore f(x)=x^3+9x^2+24x+15$

則 $f(-1)=-1+9-24+15=-1$

25. $PR=\dfrac{10000-8749}{10000}\times100=12$，依 68-95-99.7 法則

PR 12 落在 $\bar{x}-2S$ 與 $\bar{x}-S$ 之間，即 40~50 分之間