101 學年四技二專第二次聯合模擬考試
共同考科　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 101-2-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	B	D	C	D	A	D	B	A	B	D	A	C	B	A	D	C	B	A	D	A	D	A	C	B

1. $a=9$、$b=12$、$c=7$

(A) $a=9>0\Rightarrow$ 圖形開口向上且有最小值

(B) 對稱軸方程式 $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-12}{2\times 9}=\dfrac{-2}{3}$

(C) $9x^2+12x+7=4\Rightarrow 9x^2+12x+3=0$

$\Rightarrow D=12^2-4\times 9\times 3=36>0\Rightarrow$ 有兩交點

(D) $f(x)$、$g(x)$ 的領導係數皆為 9

故開口方向與大小皆一樣，可以經由平移使其重合

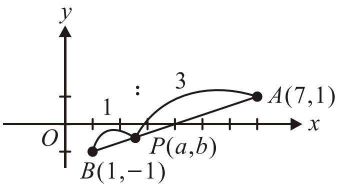
2.

1	0	−7	2	a	0	8	2
	2	4	−6	−8	$2a-16$	$4a-32$	
1	2	−3	−4	$a-8$	$2a-16$	$4a-24$	

$4a-24=4\Rightarrow a=7$

3. $\overline{AP}=3\overline{PB}\Rightarrow P(a,b)=(\dfrac{7+3}{4},\dfrac{1+(-3)}{4})=(\dfrac{5}{2},\dfrac{-1}{2})$

$\Rightarrow \overline{OP}=\sqrt{(\dfrac{5}{2})^2+(\dfrac{-1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$



4. $f(0)=6\Rightarrow 0+0+0+c=6\Rightarrow c=6$

$f(1)=-6\Rightarrow 2+a+b+6=-6\Rightarrow a+b=-14$

$f(2)=-12\Rightarrow 16+4a+2b+6=-12$

$\Rightarrow 4a+2b=-34\Rightarrow 2a+b=-17$

$\therefore a=-3$，$b=-11\Rightarrow (a,b)$ 在第三象限

5. 所求直線方程式即過 A 點之中線方程式

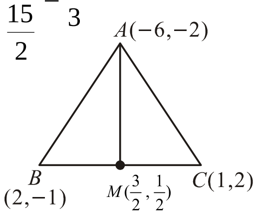
$\overline{BC}$ 中點 $M=(\dfrac{2+1}{2},\dfrac{-1+2}{2})=(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2})$

則 $\overleftrightarrow{AM}$ 的斜率 $m_{\overleftrightarrow{AM}}=\dfrac{\frac{1}{2}-(-2)}{\frac{3}{2}-(-6)}=\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{15}{2}}=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{AM}$：$y-(-2)=\dfrac{1}{3}[x-(-6)]$

$\Rightarrow 3y+6=x+6$

$\Rightarrow x-3y=0$



6. $ax^2+bx+c\ge 0$ 之解為 $x\ge 3$ 或 $x\le \dfrac{-2}{7}$

$\Rightarrow (x-3)(x+\dfrac{2}{7})\ge 0\Rightarrow (x-3)(7x+2)\ge 0$

$\Rightarrow 7x^2-19x-6\ge 0\Rightarrow$ 取$a=7$，$b=-19$，$c=-6$

$cx^2+bx+a\ge 0\Rightarrow -6x^2-19x+7\ge 0$

$\Rightarrow 6x^2+19x-7\le 0\Rightarrow (3x-1)(2x+7)\le 0$

$\Rightarrow \dfrac{-7}{2}\le x\le \dfrac{1}{3}\Rightarrow x=-3,-2,-1,0$

則滿足 $cx^2+bx+a\ge 0$ 的所有整數解之和為

$(-3)+(-2)+(-1)+0=-6$

7. Step1

$\because$直線 L 的斜率為 $\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow$ 直線 L 可假設為

$3x-4y+k=0$

Step2

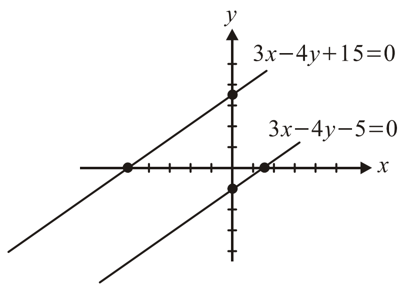
$\because$直線 L 與點 $(1,2)$

的距離為 2

$\Rightarrow \dfrac{|3\times 1-4\times 2+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2\Rightarrow k=-5,15$

Step3

可知道直線 L 為 $3x-4y+15=0\Rightarrow x$ 截距為 -5



8. $\begin{vmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0\Rightarrow 4\sin\theta-2\cos\theta=0$

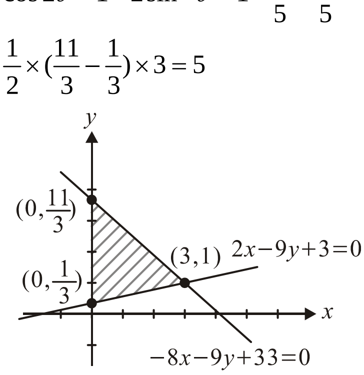
$\Rightarrow 4\sin\theta=2\cos\theta\Rightarrow 2\sin\theta=\cos\theta$

$\Rightarrow (2\sin\theta)^2=(\cos\theta)^2\Rightarrow 4\sin^2\theta=\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$\Rightarrow 5\sin^2\theta=1\Rightarrow \sin^2\theta=\dfrac{1}{5}$

$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$

9. $\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{11}{3}-\dfrac{1}{3})\times 3=5$



10. 方法一：

$s=\dfrac{7+8+5}{2}=10\Rightarrow \Delta ABC$ 面積為

$\sqrt{10(10-7)(10-8)(10-5)}=10\sqrt{3}$

$rs=10\sqrt{3}\Rightarrow 10r=10\sqrt{3}\Rightarrow r=\sqrt{3}$

$\frac{abc}{4R}=10\sqrt{3}\Rightarrow\frac{7\times8\times5}{4\times10\sqrt{3}}=R\Rightarrow R=\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7}{r}\Rightarrow Rr=7$

方法二：

$R\times r=\frac{abc}{4\Delta}\times\frac{\Delta}{s}=\frac{abc}{4s}=\frac{7\times8\times5}{40}=7$

11. (A) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times5+4\times(-12)=-33$

(B) $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\times|\vec{b}|}=\frac{-33}{5\times13}=\frac{-33}{65}$

(C) $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3&4\\5&-12\end{vmatrix}\right|=\frac{56}{2}=28$

(D) $|\vec{a}||\cos\theta|=5\times\frac{33}{65}=\frac{33}{13}$

另解 $\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}=\frac{|3\times5+4\times(-12)|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{33}{13}$

12. $L=4A\Rightarrow 2r+r\theta=4\times\frac{1}{2}r^2\theta\Rightarrow 2r+r\theta=2r^2\theta$

$\Rightarrow 2+\theta=2r\theta\Rightarrow 2=2r\theta-\theta\Rightarrow 2=(2r-1)\theta$

$\Rightarrow 8=(2r-1)\times4\theta$

13. (A) $\sin x+\cos 2x=2\Rightarrow\sin x+1-2\sin^2 x=2$

$\Rightarrow 2\sin^2 x-\sin x+1=0\Rightarrow\sin x=\frac{1\pm\sqrt{-7}}{4}$ (無實根)

(B) $x^2+6x+10=0\Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{-4}}{2}$ (無實根)

(C) $x^3+2x^2+7x+3=0$ 若實係數方程式有虛根，則虛根必成對出現，所以至少有一個實根

(D) 由 $-\sqrt{5^2+4^2}\le 5\sin x+4\cos x\le\sqrt{5^2+4^2}$ 可知

$-\sqrt{41}\le 5\sin x+4\cos x\le\sqrt{41}$

故 $5\sin x+4\cos x=10$ 無解

14. $\begin{vmatrix}1+x&2&4\\2&2+x&3\\3&1&3+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7+x&2&4\\7+x&2+x&3\\7+x&1&3+x\end{vmatrix}$

$=(x+7)\begin{vmatrix}1&2&4\\1&2+x&3\\1&1&3+x\end{vmatrix}=(x+7)\begin{vmatrix}1&2&4\\0&x&-1\\0&-1&x-1\end{vmatrix}$

$=(x+7)\begin{vmatrix}x&-1\\-1&x-1\end{vmatrix}=(x+7)(x^2-x-1)=0$

$\Rightarrow x=-7,\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\therefore -7\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1-\sqrt{5}}{2}=7$

15. Step1

已知 α、$\beta(\alpha<\beta)$ 爲方程式 $x^2-6x+3=0$ 的兩根

$\Rightarrow\alpha+\beta=6$，$\alpha\beta=3$

Step2

(1)

$(\alpha+\beta)^2=6^2\Rightarrow\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=36\Rightarrow\alpha^2+\beta^2=30$

(2) $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=30-6=24$

$\alpha<\beta\Rightarrow\alpha-\beta=-2\sqrt{6}$

Step3

$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=-2\sqrt{6}\times33=-66\sqrt{6}$

16. $a=\sqrt{117-28\sqrt{17}}=\sqrt{117-2\sqrt{68\times49}}$

$=\sqrt{68}-\sqrt{49}=\sqrt{68}-7$

$\therefore x=1$、$y=\sqrt{68}-8$

$\frac{4}{y}-\frac{19}{x+y}=\frac{4}{\sqrt{68}-8}-\frac{19}{\sqrt{68}-7}$

$=(\sqrt{68}+8)-(\sqrt{68}+7)=1$

17. $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1x+b_1y=-c_1\\a_2x+b_2y=-c_2\end{cases}$

$\Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix}-c_1&b_1\\-c_2&b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}$，$y=\frac{\begin{vmatrix}a_1&-c_1\\a_2&-c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}$

(1) $\begin{vmatrix}b_1&b_2\\a_1&a_2\end{vmatrix}=4\Rightarrow\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}=-4\Rightarrow\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}=-4$

(2)

$\begin{vmatrix}3a_1&3a_2\\2c_1&2c_2\end{vmatrix}=48\Rightarrow 3\times2\begin{vmatrix}a_1&a_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}=48\Rightarrow\begin{vmatrix}a_1&a_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}=8$

$\Rightarrow\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_2&c_2\end{vmatrix}=8\Rightarrow\begin{vmatrix}a_1&-c_1\\a_2&-c_2\end{vmatrix}=-8$

(3) $\begin{vmatrix}2b_1+c_1&b_1-c_1\\2b_2+c_2&b_2-c_2\end{vmatrix}=96\Rightarrow\begin{vmatrix}3b_1&b_1-c_1\\3b_2&b_2-c_2\end{vmatrix}=96$ （第二行 $\times1$ 加至第一行）

$\Rightarrow 3\begin{vmatrix}b_1&b_1-c_1\\b_2&b_2-c_2\end{vmatrix}=96\Rightarrow\begin{vmatrix}b_1&b_1-c_1\\b_2&b_2-c_2\end{vmatrix}=32$ （第一行 $\times(-1)$ 加至第二行）

$\Rightarrow\begin{vmatrix}b_1&-c_1\\b_2&-c_2\end{vmatrix}=32\Rightarrow\begin{vmatrix}-c_1&b_1\\-c_2&b_2\end{vmatrix}=-32$

$\therefore x_1=\frac{-32}{-4}=8$、$y_1=\frac{-8}{-4}=2\Rightarrow x_1+y_1=10$

18. (A) x 爲實數，$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\ge0$

(B) $a>0$、$b>0$，當 $a=b=\frac{1}{10}$

$10a^2+2b-1=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}-1=\frac{-7}{10}<0$

(C) a、b 爲實數，柯西不等式

$25(a^2+b^2)=[3^2+(-4)^2](a^2+b^2)\ge(3a-4b)^2$

(D) $a\ge0$、$b\ge0$，算幾不等式

$2a+b\ge2\sqrt{2ab}=\sqrt{8ab}\ge\sqrt{6ab}$

19. $\omega=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos60^\circ+i\sin60^\circ$

$\Rightarrow\omega^3=\cos180^\circ+i\sin180^\circ=-1\Rightarrow\omega^3=-1$

$\omega=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\Rightarrow 2\omega=1+\sqrt{3}i\Rightarrow 2\omega-1=\sqrt{3}i$

$\Rightarrow 4\omega^2-4\omega+4=0\Rightarrow \omega^2-\omega+1=0$

$(1-\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)$

$=(1-\omega)(1+\omega^2)(1-\omega)(1+\omega^2)$

$=(1-\omega)^2(1+\omega^2)^2=(-\omega^2)^2(\omega)^2$

($\because \omega^2-\omega+1=0\Rightarrow 1-\omega=-\omega^2$，$\omega^2+1=\omega$)

$=\omega^4\omega^2=\omega^6=(\omega^3)^2=1$ ($\because \omega^3=-1$)

20. 原式可以變成

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5\cdots\cdots(1)\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=8\cdots\cdots(2)\left(\begin{array}{l}xyz\neq 0\\ \text{故}x\neq 0\text{且}y\neq 0\text{且}z\neq 0\end{array}\right)\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=7\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

$\dfrac{(1)+(2)+(3)}{2}\Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=10\cdots\cdots(4)$

$(4)-(1)\Rightarrow \dfrac{1}{z}=5\Rightarrow z=\dfrac{1}{5}$，$(4)-(2)\Rightarrow \dfrac{1}{x}=2\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

$(4)-(3)\Rightarrow \dfrac{1}{y}=3\Rightarrow y=\dfrac{1}{3}$

$2x+6y+10z=2\times\dfrac{1}{2}+6\times\dfrac{1}{3}+10\times\dfrac{1}{5}=5$

21. $x^3+8i=0\Rightarrow x^3=-8i=8(0-i)$

$=8[\cos(\dfrac{3}{2}\pi+2n\pi)+i\sin(\dfrac{3}{2}\pi+2n\pi)]$，$n\in N$

令 $x=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$r\in R$，$\theta\in R$

$\Rightarrow x^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$

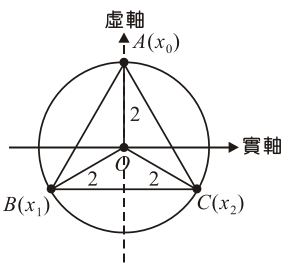
$$\begin{cases}r^3=8\\ \dfrac{3}{2}\pi+2n\pi=3\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}r=2\\ n=0，\theta=\dfrac{\pi}{2}；n=1，\theta=\dfrac{7}{6}\pi；n=2，\theta=\dfrac{11}{6}\pi\end{cases}$$

$\Rightarrow x_0=2(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2})$，

$x_1=2(\cos\dfrac{7}{6}\pi+i\sin\dfrac{7}{6}\pi)$，

$x_2=2(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi)$



將此三根畫在複數平面上

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=2$

$\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC=120°$

$3\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 120°=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

22. $\vec{a}+m\vec{b}+\vec{c}=0\Rightarrow \vec{a}+m\vec{b}=-\vec{c}$

$\Rightarrow|\vec{a}+m\vec{b}|=|-\vec{c}|=|\vec{c}|\Rightarrow|\vec{a}+m\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$

$\Rightarrow(\vec{a}+m\vec{b})\cdot(\vec{a}+m\vec{b})=11$

$\Rightarrow|\vec{a}|^2+2m\vec{a}\cdot\vec{b}+m^2|\vec{b}|^2=11$

$\Rightarrow 4+2m|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta+m^2\cdot 16=11$

$\Rightarrow 4+2m\times 2\times 4\times\dfrac{-9}{16}+m^2\times 16=11$

$\Rightarrow 16m^2-9m-7=0\Rightarrow(16m+7)(m-1)=0$

$\Rightarrow m=\dfrac{-7}{16}$ (1 不合)

23. $a^2+(b-2)^2+(c+3)^2=13$

由柯西不等式 $[a^2+(b-2)^2+(c+3)^2][1^2+(-1)^2+1^2]$

$\geq(a-b+2+c+3)^2=(a-b+c+5)^2$

$\Rightarrow 13\times 3\geq(a-b+c+5)^2\Rightarrow(a-b+c+5)^2\leq 39$

$\Rightarrow -\sqrt{39}\leq(a-b+c+5)\leq\sqrt{39}$

$\Rightarrow B=-5-\sqrt{39}\leq(a-b+c)\leq -5+\sqrt{39}=A$

$\therefore A\times B=(-5+\sqrt{39})(-5-\sqrt{39})=25-39=-14$

24. $\begin{vmatrix}3 & x+2 & 2\\ x^2+1 & 1 & x^4+1\\ 2 & x^3+1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & \sqrt{2}+2 & 2\\ 2+1 & 1 & 4+1\\ 2 & 2\sqrt{2}+1 & 2\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}3 & \sqrt{2}+2 & 2\\ 3 & 1 & 5\\ 2 & 2\sqrt{2}+1 & 2\end{vmatrix}$

$=(6+10\sqrt{2}+20+12\sqrt{2}+6)-(4+30\sqrt{2}+15+6\sqrt{2}+12)$

$=(32+22\sqrt{2})-(31+36\sqrt{2})=1-14\sqrt{2}$

25. 實係數方程式有虛根，虛根必成對出現

由 $b+2i$，可以知道另一根為 $b-2i$

以及三次方程式有三個根，另一根必為實根

由 $3+ai(a\neq -2)$ 可以知道 $a=0$

$x^3-21x^2+cx+d=(x-3)[x-(b+2i)][x-(b-2i)]$

$=(x-3)[(x-b)-2i][(x-b)+2i]$

$=(x-3)[(x-b)^2-(2i)^2]=(x-3)(x^2-2bx+b^2+4)$

$=x^3-(2b+3)x^2+(b^2+6b+4)x-3b^2-12$

比較係數可以知道 $21=2b+3\Rightarrow b=9$

$\Rightarrow x^3-21x^2+cx+d=x^3-21x^2+139x-255\Rightarrow c=139$

$\therefore a+b+c=148$